Suma de series infinitas divergentes

1.- Introducción:

Verdad o mentira?

Es, en cualquier caso, ambíguo. Con defensores y detractores de los resultados asombrosos que van apareciendo sobre este tema desde Grandi hasta Ramanujan, porque la curiosidad matemática no tolera bien operaciones que tengan soluciones indefinidas, indeterminadas, en definitiva, no agrada que no exista una respuesta concreta.

El estudio se trata de dar una mirada a una de estas soluciones sorprendentes:

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} n \ = \ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots \ = \ -\frac{1}{12}}$$

"El sumatorio de todos los números naturales, desde 1 hasta ∞, da como resultado: menos 1 dividido por doce"

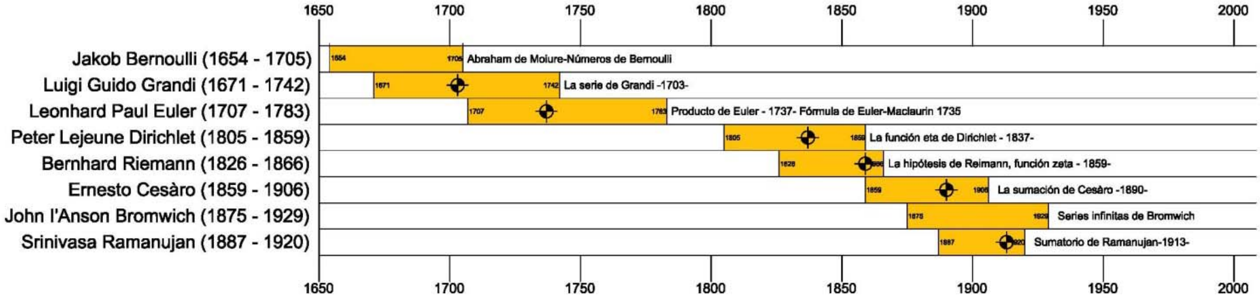
Hay otras series de resultados "enigmáticos"; estudiaremos dos de ellas, que nos ayudarán en nuestras demostraciones:
La primera,

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots \ = \frac{1}{2}$$

luego haremos las posibles demostraciones de este resultado. Parece que la solución posible sea= 0, pero también podría ser 1, y entre 0 y 1, porque no: ½.
La segunda,

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \ = \frac{1}{4}$$

Muchos científicos han estado dando vueltas a estas series durante años. El siguiente gráfico muestra cronológicamente algunos de ellos y su aportación más importante.



Antecedentes matemáticos en el cálculo de sumas de series infinitas divergentes

2.- Demostración básica:

Si restamos la serie S_2 de la serie S

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$$

$$- S_2 = -(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots)$$

$$S - S_2 = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \cdots$$

Porque 1-1 =0 ; +2-(-2) =4 ; +3-(+3) = 0; +4-(-4) =8 y así sucesivamente..., tenemos que,

$$S - S_2 = 4 + 8 + 12 + 16 + \cdots$$

Sacando factor común el 4 a esta serie,

$S - S_2 = 4\,(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots)$ ó lo que es lo mismo, 4 veces la serie S.

$S - S_2 = 4\,S$ si sustituimos S_2 por su valor ¼

$S - \frac{1}{4} = 4\,S$ si pasamos S al mismo lado de la ecuación,

$-\frac{1}{4} = 3\,S$ si despejamos S,

$$\boxed{S = -\frac{1}{12}}$$

Luego queda demostrado el primer sumatorio enunciado,

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots = -\frac{1}{12}}$$

"El sumatorio de todos los números naturales, desde 1 hasta ∞, da como resultado: menos 1 dividido por doce"

3.- Otras demostraciones:

3.1 Vamos con la primera,

$$\mathrm{S}_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}$$

Está claro que, en esa serie, si el ∞ corresponde a un +1 la suma será 1; en cambio, si el ∞ corresponde a un -1 la suma será 0.
Lo mismo si sumamos los números, de dos en dos, agrupados con paréntesis, dependerá de dónde coloques el paréntesis:

$$\mathrm{S}_1 = (1-1)(+1-1)(+1-1)(+1-1)\ldots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$\mathrm{S}_1 = 1(-1+1)(-1+1)(-1+1)\ldots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

3.1.1 Vamos a ver un par de métodos, empezamos con el de la serie de Grandi,

$\mathrm{S}_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ restamos de 1 cada miembro de la ecuación

$1 - \mathrm{S}_1 = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots)$ resolvemos el paréntesis

$1 - \mathrm{S}_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ el miembro derecho representa la misma serie S_1

$1 - \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1$ reunimos los S_1 en un mismo lado,

$1 = 2\mathrm{S}_1$ despejamos S_1

$$\boxed{\mathrm{S}_1 = \frac{1}{2}}$$

3.1.2 El método de suma de los elementos de una sucesión geométrica,

Fórmula de la suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica cuando la razón, en valor absoluto, es menor que la unidad $|r| < 1$

$\boxed{S\infty = \frac{\mathrm{a}_1}{1-\mathrm{r}}}$ dónde S∞ es el sumatorio de los infinitos términos, a_1 es el primer término de la sucesión, y r es la razón de la sucesión.

Planteamos una sucesión geométrica, de primer término 1 y razón x

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$ que para $x = -1$ nos queda como S_1, 1-1+1-1+1-1+....

Aplicando la fórmula de la suma, $S\infty = \frac{1}{1-(-1)}$ luego, $S\infty = \frac{1}{2}$ por lo tanto,

$$\boxed{\mathrm{S}_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}}$$

3.2 Ahora veamos la segunda,

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4}$$

3.2.1 También veremos un par de demostraciones, una muy directa y otra no tanto,

Sumamos la serie S_2 consigo misma, desplazando el segundo sumando un término,

$$\begin{array}{r}
S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \\
+S_2 = \qquad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \\
\hline
2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots
\end{array}$$

Ésta corresponde a la serie S1 cuyo resultado es ½, sustituyendo la serie por el valor de la suma,

$$2S_2 = \frac{1}{2}$$

Despejando S_2, tenemos el resultado,

$$\boxed{S_2 = \frac{1}{4}}$$

3.2.2 El método de suma de los elementos de un polinomio de potencias de x,

Partimos de la sucesión geométrica de primer término 1 y razón x,

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Hacemos la derivada, $\partial x^n = nx^{n-1}$ y tenemos,
$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots$ vamos a calcular cual será la fórmula de esta suma. A esta serie, que llamaremos P, le multiplicamos sus dos miembros por x (Px), y le restamos el resultado a P,

$$\begin{array}{r}
P = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots \\
Px = \qquad x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots \\
\hline
P - Px = 1 + \ x + \ x^2 + \ x^3 + \ x^4 + \ x^5 + \cdots
\end{array}$$

esta es la suma de la sucesión de partida, sustituyendo por el resultado podemos escribir la resta anterior,

$$P - Px = \frac{1}{1-x}$$

Sacando factor comúm P queda,

$P(1-x) = \frac{1}{1-x}$ y despejando P, la fórmula de la suma es,

$$P = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ahora podemos calcular,

$$P = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

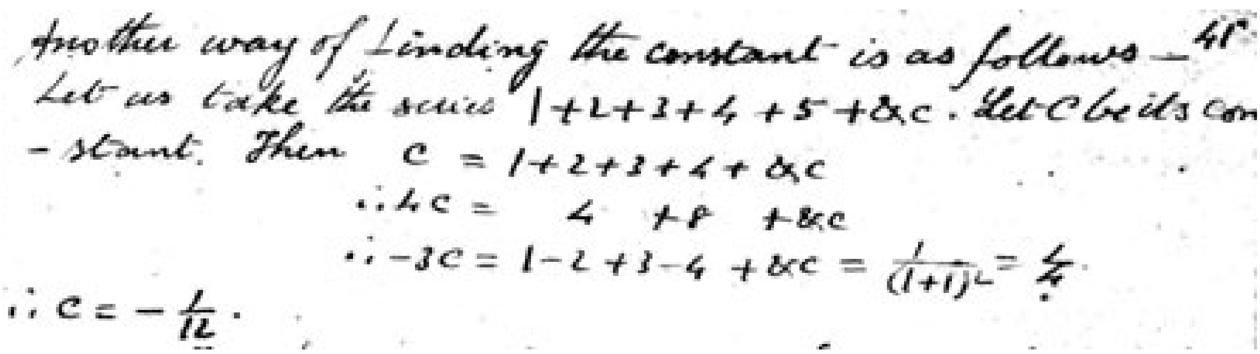
que para x = - 1 sería,

$$P = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{(1-(-1))^2}$$

Solucionando queda,

$$\boxed{S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4}}$$

3.3 Transcribo un extracto del primer cuaderno Ramunujan,



Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its con-
-stant. Then $C = 1+2+3+4+\&c$
$\therefore 4C = 4 + 8 + \&c$
$\therefore -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$
$\therefore C = -\frac{1}{12}$.

donde aparece el resultado presentado.